# 正算子与等距同构

正算子：自伴且 $\forall v\in V,\ \langle Tv,v\rangle \geq 0$

*在 $\mathbb{C}$ 上仅自伴算子才能使 $\langle Tv,v\rangle$ 是 $\mathbb{R}$.

刻画：等价条件
- T是正的
- T自伴且T所有本征值非负 ↓定义
- T有正的平方根 ↓谱分解
- T有自伴的平方根 ↓定义
- $\exists R\in\mathcal{L}(V)$, s.t. $T=R^*R$ ↓定义构造

①每个正算子都有唯一平方根.（证明）

## 等距同构

⟺保持范数

刻画
- S是等距同构
- 所有 $u,v\in V$，有 $\langle Su,Sv\rangle=\langle u,v\rangle$ 保内积
- 对V中任意规范正交组 $e_1,\cdots,e_n$，均有 $Se_1,\cdots,Se_n$ 规范正交
- V有规正基 $e_1,\cdots,e_n$ s.t. $Se_1,\cdots,Se_n$ 规范正交.
- $SS^*=I,\ S^*S=I$
- $S^*$是等距同构
- S可逆且 $S^{-1}=S^*$

⟹每个等距同构都是正规的.

⟹正规算子刻画可给出等距同构刻画.

② V是复内积空间 则 S等距同构
等价命题：V有一个由S的本征向量组成的标正基，相应本征值绝对值为1.

## 极分解

1° $\sqrt{T}$ 表示T唯一的正平方根

2°. $T\in\mathcal{L}(V)$，则$\exists$一个等距同构 $S\in\mathcal{L}(V)$ s.t. $T=S\sqrt{T^*T}$

## 奇异值

$\sqrt{T^*T}$ 的本征值，每个本征值λ重复 $\dim E(\lambda,\sqrt{T^*T})$ 次

## 奇异值分解

$T\in\mathcal{L}(V)$ 有奇异值 $s_1,\cdots,s_n$ 则V有两个规正基 $e_1,\cdots,e_n$ 和 $f_1,\cdots,f_n$
s.t. 每个 $v\in V$ 有 $Tv=s_1\langle v,e_1\rangle f_1+\cdots+s_n\langle v,e_n\rangle f_n$

过程：对 $\sqrt{T^*T}$ 应用谱定理：$\sqrt{T^*T}\,e_j=s_je_j$

$v=\langle v,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle v,e_n\rangle e_n$

$\sqrt{T^*T}v=s_1\langle v,e_1\rangle e_1+\cdots+s_n\langle v,e_n\rangle e_n$.

$\exists S\in\mathcal{L}(V)$，$T=S\sqrt{T^*T}$

$\therefore Tv=s_1\langle v,e_1\rangle Se_1+\cdots+s_n\langle v,e_n\rangle Se_n$

对每个j设 $f_j=Se_j$ ⟹ $f_1,\cdots,f_n$ 也是规正基

$Tv=s_1\langle v,e_1\rangle f_1+\cdots+s_n\langle v,e_n\rangle f_n$

$$\mathcal{M}(T,(e_1,\cdots,e_n),(f_1,\cdots,f_n))=\begin{pmatrix} s_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & s_n\end{pmatrix}$$

$Te_j=s_jf_j$.

## 极分解的构造

1° 若 $v\in V$，$\|Tv\|^2=\langle Tv,Tv\rangle=\langle T^*Tv,v\rangle=\langle\sqrt{T^*T}\sqrt{T^*T}v,v\rangle$
$=\langle\sqrt{T^*T}v,\sqrt{T^*T}v\rangle=\|\sqrt{T^*T}v\|^2$

⟹ $\|Tv\|=\|\sqrt{T^*T}v\|$

2° 定义线性映射 $S_1$. $\operatorname{range}\sqrt{T^*T}\to\operatorname{range}T$

$S_1(\sqrt{T^*T}v)=Tv$. 目标：把 $S_1$ 扩张成V上的等距同构

∵ $S_1$ 的良定义，线性.

⟹ $\forall u\in\operatorname{range}\sqrt{T^*T}$ $\|S_1u\|=\|u\|$ 且 $S_1$ 是单射

$\therefore \dim\operatorname{range}\sqrt{T^*T}=\dim\operatorname{range}T$

⟹ $\dim(\operatorname{range}\sqrt{T^*T})^\perp=\dim(\operatorname{range}T)^\perp$

取 $(\operatorname{range}\sqrt{T^*T})^\perp$ 的标正基 $e_1,\cdots,e_m$，$(\operatorname{range}T)^\perp$ 标正基 $f_1,\cdots,f_m$

定义 $S_2$: $(\operatorname{range}\sqrt{T^*T})^\perp\to(\operatorname{range}T)^\perp$

$S_2(a_1e_1+\cdots+a_me_m)=a_1f_1+\cdots+a_mf_m$

$\forall w\in(\operatorname{range}\sqrt{T^*T})^\perp$，$\|S_2w\|=\|w\|$

3° $V=(\operatorname{range}\sqrt{T^*T})^\perp\oplus\operatorname{range}\sqrt{T^*T}$

$v=u+w$. $u\in\operatorname{range}\sqrt{T^*T}$ $w\in(\operatorname{range}\sqrt{T^*T})^\perp$

$Sv=S_1u+S_2w$. 验证等距同构

实向量空间上的算子

复化 (以 $R^n$ 构造 $C^n$ 的推广)

① $V_C$ 是复向量空间. (加法单位元 $0+i0$)

② $V$ 的基是 $V_C$ 的基

算子的复化:

$T_C(u+iv)=Tu+iTv$.

*设 $v_1,\dots,v_n$ 是实空间 $V$ 的基 则 $M(T)=M(T_C)$

①每个算子都有一维或二维不变子空间.

复化的极小多项式 $(T_C)^n(u+iv)=T^nu+iT^nv$

$T\in L(V)$, $T_C$ 的极小多项式等于 $T$ 的极小多项式

复化的本征值.

$\lambda$ 是 $T_C$ 的本征值 $\Leftrightarrow$ $\lambda$ 是 $T$ 的本征值 $(\lambda\in\mathbb{R})$

① $(T_C-\lambda I)^j(u+iv)=0 \Leftrightarrow (T_C-\bar{\lambda}I)^j(u-iv)=0$ $\dim G(\lambda,T_C)=\dim G(\bar{\lambda},T_C)$

① $T_C$ 的非实的本征值成对出现

$\lambda$ 是 $T_C$ 本征值 $\Leftrightarrow$ $\bar{\lambda}$ 是 $T_C$ 的本征值

$\lambda$ 的重数等于 $\bar{\lambda}$ 的重数

①奇数维向量空间上算子都有本征值

复化的特征多项式

$T_C$ 的特征多项式系数都是实数

$T$ 的特征多项式定义为 $T_C$ 的特征多项式

① $V$ 是 $\mathbb{R}$. $T\in L(V)$

$\begin{cases} T\text{的特征多项式系数是实的} \\ T\text{的特征多项式次数为}\dim V. \\ T\text{所有本征值恰为}T\text{特征多项式所有实零点.} \end{cases}$

① $g$ 是 $T$ 的特征多项式 $\Rightarrow g(T)=0$

① $\begin{cases} T\text{极小多项式次数至多是}\dim V. \\ T\text{特征多项式是}T\text{极小多项式的多项式倍} \end{cases}$

实内积空间上的算子

正规算子(非自伴的)

① $V$ 是二维实内积空间.

等价条件 $\begin{cases} T\text{是正规但不是自伴} \\ T\text{关于}V\text{的每个标正基}: \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad b\neq 0 \\ T\text{关于}V\text{的某个}\,---: \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad b>0 \end{cases}$

① $T\in L(V)$ 正规, $U$ 是不变子空间

则 $\begin{cases} U^\perp\text{在}T\text{下不变} \\ U\text{在}T^*\text{下不变} \\ (T|_U)^*=(T^*)|_U \\ T|_U\in L(U)\text{和}T|_{U^\perp}\in L(U^\perp)\text{都正规} \end{cases}$

证明: 矩阵 + $\|Te_i\|=\|T^*e_i\|$

## . $F=R$时正规算子的刻画

$V$是实内积空间，等价条件

$\begin{cases} T\text{正规} \\ V\text{有规范正交基使得}T\text{关于这个基有分块对角矩阵,} \\ \text{对角线上每个块是 }1\times1\text{矩阵 或形如}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ b>0 \end{cases}$

## 实内积空间下等距同构

等价条件 $\begin{cases} S\text{是等距同构} \\ V\text{有规范正交基 s.t. }S\text{关于这个基有分块对角矩阵} \\ \text{对角线上的每个块是由1或-1构成的1×1矩阵} \\ \text{或是形如}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\text{的2×2矩阵} \end{cases}$

/

# 复向量空间上的算子

递增的零空间序列
- $\{0\}=\text{null}\,T^0\subset\text{null}\,T^1\subset\cdots\subset\text{null}\,T^{k+1}\subset\cdots$
- 设 $m$ 是 $\mathbb{N}$ s.t. $\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}$ 则 $\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}=\cdots$
- 零空间停止增长，令 $n=\dim V$，则 $\text{null}\,T^n=\text{null}\,T^{n+1}=\text{null}\,T^{n+2}=\cdots$

$T\in\mathcal{L}(V)$，令 $n=\dim V$ 则 $V=\text{null}\,T^n\oplus\text{range}\,T^n$

广义本征向量（目标：更好描述 $T\in\mathcal{L}(V)$：$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$，$U_i$ 都是 $V$ 在 $T$ 上的不变子空间）
- 第5章：$V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$ $\Leftrightarrow$ $V$ 有一个由 $T$ 的本征向量组成的基
- 第6章：若 $V$ 是内积空间，
  - $F=C$：直和分解对正规算子成立
  - $F=\mathbb{R}$，对自伴算子成立

$\Rightarrow$ 有足够多的本征向量来构成 $V$ 的一个基

- $v\neq0$，且存在正整数 $j$，s.t. $(T-\lambda I)^j v=0$
- 广义本征空间：$G(\lambda,T)$：$T$ 相应于 $\lambda$ 的所有广义本征向量的集合。
- $G(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$
- ⊙ $T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $T$ 所有不同本征值，$v_1,\cdots,v_m$ 为相应广义本征向量，则 $v_1,\cdots,v_m$ 线性无关

幂零算子
- 定义：某个幂等于0
- ⊙ 设 $N\in\mathcal{L}(V)$ 幂零，则 $N^{\dim V}=0$
- 幂零算子的矩阵：$V$ 有一个基 s.t. $\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$ （取 $\text{null}\,N$ 一个基，扩充成 $\text{null}\,N^2$ …… 最终得到 $\text{null}\,N^{\dim V}$ 的一个基）

复向量空间上算子的刻画
- $T\in\mathcal{L}(V)$，$p\in\mathcal{P}(F)$，则 $\text{null}\,p(T)$．$\text{range}\,p(T)$ 在 $T$ 下不变
- 刻画
  - $V=G(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus G(\lambda_m,T)$ （$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $T$ 不同本征值）
  - 每个 $G(\lambda_j,T)$ 在 $T$ 下不变
  - 每个 $(T-\lambda_j I)|_{G(\lambda_j,T)}$ 都是幂零的
- $T\in\mathcal{L}(V)$．$V$ 有一个由 $T$ 的广义本征向量组成的基．

本征值重数
- $\lambda$ 的重数 $\to$ $G(\lambda,T)$ 的维数 $\to$ $\dim\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$
- $T$ 所有本征值重数之和等于 $\dim V$．

具有上三角块的分块对角矩阵：$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是 $T$ 的所有互不相同本征值．重数分别 $d_1,\cdots,d_m$．则 $V$ 有一个基使 $T$ 关于这个基有分块对角阵 $\begin{pmatrix}A_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & A_m\end{pmatrix}$，$A_j=\begin{pmatrix}\lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_j\end{pmatrix}$ $d_j\times d_j$ 上三角矩阵

平方根
- $N\in\mathcal{L}(V)$ 幂零，则 $I+N$ 有平方根
- $C$ 上的可逆算子有平方根

算子幂的零空间

递增的零空间序列 $\{0\}=\text{null}\,T^0\subset\text{null}\,T^1\subset\cdots\subset\text{null}\,T^k\subset\text{null}\,T^{k+1}\subset\cdots$

零空间停止增长
- m是非负整数使 $\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}$ 则 $\text{null}\,T^m=\text{null}\,T^{m+1}=\text{null}\,T^{m+2}=\cdots$
- 令 $n=\dim V$，则 $\text{null}\,T^n=\text{null}\,T^{n+1}=\cdots$

$T\in\mathcal{L}(V)$，$n=\dim V$. 则 $V=\text{null}\,T^n\oplus\text{range}\,T^n$ （$V=\text{null}\,T\oplus\text{range}\,T$ 不是对每个 $T\in\mathcal{L}(V)$ 成立）

广义本征向量 （有些算子因为没有足够多的本征向量而没有一个好的描述）

好的直和分解：$V=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$，每个 $U_j$ 都是V在T下的不变子空间

（最简单：一维：$V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$）

- λ是T的本征值，$v\in V$：$v\neq0$ 且 ∃正整数j s.t. $(T-\lambda I)^j v=0$
- 广义本征空间：T相应于λ的所有广义本征向量的集合. $G(\lambda,T)$

  （$E(\lambda,T)\subset G(\lambda,T)$）

刻画广义本征空间：$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda\in\mathbf{F}$. 则 $G(\lambda,T)=\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$

广义本征向量 线性无关 （证明）

幂零算子
- $N\in\mathcal{L}(V)$ 幂零，则 $N^{\dim V}=0$
- 幂零算子的矩阵 $\begin{pmatrix}0 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}$

算子的分解

- $p(T)$ 的零空间和像空间在T下不变. $\text{null}\,p(T)$. $\text{range}\,p(T)$
- 复空间上算子的刻画（$T\in\mathcal{L}(V)$，$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是T不同本征值）

  （证明）
  - $V=G(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus G(\lambda_m,T)$
  - 每个 $G(\lambda_j,T)$ 在T下不变
  - 每个 $(T-\lambda_j I)|_{G(\lambda_j,T)}$ 都是幂零的

- V是复向量空间，V有一个由T的广义本征向量组成的基
- T本征值的重数：$\dim G(\lambda,T)=\dim\text{null}(T-\lambda I)^{\dim V}$

  （重数之和等于 $\dim V$）

具有上三角分块的分块对角矩阵 $\lambda_1,\cdots,\lambda_m$ 是T互不相同的本征值

重数为 $d_1\cdots d_m$. $\begin{pmatrix}A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_m\end{pmatrix}$ $A_j=\begin{pmatrix}\lambda_j & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_j\end{pmatrix}$

平方根
- $I+N$ 有平方根
- C上可逆算子有平方根

特征多项式

$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$表示 重数为 $d_1,\cdots,d_m$ . $(z-\lambda_1)^{d_1}\cdots(z-\lambda_m)^{d_m}$

T的特征多项式次数等于 $\dim V$.

T的特征多项式零点恰好是T的本征值

凯莱-哈密顿定理 $V$,复向量空间,$T\in\mathcal{L}(V)$. 令$q$表示T的特征多项式 则$q(T)=0$.

极小多项式

首一多项式:最高次数项系数为1

极小多项式: $T\in\mathcal{L}(V)$,存在唯一一个次数最小的首一多项式$p$使$p(T)=0$.

* V上每个算子极小多项式次数最多为 $(\dim V)^2$

若V是复向量空间,最多为 $\dim V$.

$q(T)=0 \Leftrightarrow q$是T极小多项式的多项式倍

特征多项式是极小多项式的多项式倍

本征值是极小多项式的零点

若尔当形

对应于幂零算子的基 $T\in\mathcal{L}(V)$, $v\in V$. 若$\exists m\in\mathbb{N}$ s.t. $T^{m-1}v\neq0$, $T^m v=0$, 则 $v, Tv, \cdots, T^{m-1}v$ 线性无关

① 循环子空间 $C=\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^{m-1}v)$

$$M(T|_C,(T^{m-1}v,\cdots,v))=\begin{pmatrix}0&1&&0\\ \vdots&0&\ddots&\\ \vdots&\vdots&\ddots&1\\ 0&0&\cdots&0\end{pmatrix}$$

② 对应于幂零算子的基

$N\in\mathcal{L}(V)$,幂零 则∃向量 $v_1,\cdots,v_n\in V$. 非负整数 $m_1,\cdots,m_n$ s.t.

(a) $N^{m_1}v_1,\cdots,Nv_1,v_1,\cdots,N^{m_n}v_n,\cdots,Nv_n,v_n$是$V$的基

(b) $N^{m_1+1}v_1=\cdots=N^{m_n+1}v_n=0$ (证明)

过程: $V=G(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus G(\lambda_m,T)$

每个$G(\lambda_j,T)$在T下不变

$(T-\lambda_jI)|_{G(\lambda_j,T)}$幂零 ⇒ 首要问题: $N\in\mathcal{L}(V)$幂零, 找到V的基使$M(N)$尽可能简单

$N^{m_1}v_1, N^{m_1-1}v_1,\cdots, Nv_1, v_1$.

$\cdots$

$N^{m_n}v_n, N^{m_n-1}v_n,\cdots Nv_n, v_n$.

$\operatorname{null}N\subset\operatorname{null}N^2\subset\cdots\subset\operatorname{null}N^m=V$.

$N^{m_1}v_1,\cdots N^{m_n}v_n$是$\operatorname{null}N$的基

$N^{m_1}v_1,\cdots,N^{m_n}v_n, N^{m_1-1}v_1,\cdots N^{m_n-1}v_n$ (剔除非法向量)是$\operatorname{null}N^2$的基

$\dim\operatorname{null}N^{k+1}-\dim\operatorname{null}N^k\leq\dim\operatorname{null}N^k-\dim\operatorname{null}N^{k-1}$

本征值 $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$

不变子空间

本征值.本征向量.

$U=\{\lambda v:\lambda\in F\}=\mathrm{span}(v)$. 一维子空间.

若T在U下不变. $Tu\in U$ $\Rightarrow\exists\lambda$ $Tu=\lambda u$

本征值等价条件

- $\lambda$是T的本征值
- $T-\lambda I$不是单的
- $T-\lambda I$不是满的
- $T-\lambda I$不可逆

线性无关的本征向量 (相应于不同本征值)

① V是有限维,则V上每个算子最多有dimV个互不相同本征值.

① 限制算子 $T|_U\in\mathcal{L}(U)$, $T|_U(u)=Tu$.

($U$是T下不变子空间).

① 商算子: $T/U\in\mathcal{L}(V/U)$, $(T/U)(v+U)=Tv+U$

本征向量与上三角矩阵

多项式作用于算子, 多项式乘积可交换☆

① 有限维非零复向量空间上的每个算子都有本征值.(证明)

上三角矩阵 线性代数中心目标: 对于给定$T\in\mathcal{L}(V)$, 必定存在一个基使T关于该基有个相当简单的矩阵

等价命题

- ① T关于$v_1,\cdots,v_n$的矩阵上三角
- ② 对每个$j=1,\cdots,n$有$Tv_j\in\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_j)$
- ③ 对每个$j=1,\cdots,n$有$\mathrm{span}(v_1,\cdots,v_j)$在T下不变.

① 在C上每个算子都有上三角矩阵

① T是可逆⇔这个上三角矩阵对角线上元素都不是零

① T的本征值恰为上三角矩阵对角线上元素

本征空间

$E(\lambda,T)=\mathrm{null}(T-\lambda I)$

① 本征空间之和是直和

$\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim E(\lambda_m,T)\leq\dim V$

可对角化等价条件

- T可对角化.
- V有由T的本征向量构成的基
- V有在T下不变的一维子空间$U_1,\cdots,U_n$ s.t. $V=U_1\oplus\cdots\oplus U_n$
- $V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$
- $\dim V=\dim E(\lambda_1,T)+\cdots+\dim(\lambda_m,T)$

① 若$T\in\mathcal{L}(V)$有dimV个互异本征值, 则T可对角化

向量空间的积

$V_1\times\cdots\times V_m=\{(v_1,\cdots,v_m):v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m\}$

$\dim(V_1\times\cdots\times V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$

① $U_1,\cdots,U_m$ 为 $V$ 的子空间，$T: U_1\times\cdots\times U_m\to U_1+\cdots+U_m$ 为 $T(u_1,\cdots,u_m)=u_1+\cdots+u_m$.

则 $U_1+\cdots+U_m$ 是直和 iff $T$ 是单射

商空间

$v+U=\{v+u, u\in U\}$

仿射子集 $\begin{cases} v+U \\ v+U \text{平行于} U \end{cases}$

商空间：$V/U=\{v+U: v\in V\}$ (所有平行于 $U$ 的仿射子集的集合)

① 等价命题 $\begin{cases} v-w\in U \\ v+U=w+U \\ (v+U)\cap(w+U)\neq\emptyset \end{cases}$

② $\begin{cases} (v+U)+(w+U)=(v+w)+U \\ \lambda(v+U)=\lambda v+U \end{cases}$

③ 商空间是向量空间.

商映射 $\pi: V\to V/U$ : $\forall v\in V$, $\pi(v)=v+U$

$\dim V/U=\dim V-\dim U$

④ 每个线性映射诱导一个 $\tilde{T}$ ($V/\text{null}\,T$)

$T\in\mathcal{L}(V,W)$ 定义 $\tilde{T}: V/\text{null}\,T\to W$ : $\tilde{T}(v+\text{null}\,T)=Tv$

(a) $\tilde{T}$ 是 $V/\text{null}\,T$ 到 $W$ 的线性映射.

(b) $\tilde{T}$ 是单的.

(c) $\text{range}\,\tilde{T}=\text{range}\,T$.

(d) $V/\text{null}\,T$ 同构于 $\text{range}\,T$.

对偶

线性泛函. $\mathcal{L}(V,\mathbf{F})$ 中的元素

对偶空间 $V'$ $\begin{cases} V'=\mathcal{L}(V,\mathbf{F}) \\ \dim V=\dim V' \end{cases}$

对偶基 $\varphi_j(v_k)=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$

* $\mathbf{F}^n$ 标准基 $e_1,\cdots,e_n$ 的对偶基

定义 $\varphi_j(x_1,\cdots,x_n)=x_j$ （$e_1,\cdots,e_n$ 的）

$\therefore \varphi_j(e_k)=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$ $\therefore \varphi_1,\cdots,\varphi_n$ 是对偶基

① 对偶基是对偶空间的基

对偶映射. $T\in\mathcal{L}(V,W)$ 则 $T'\in\mathcal{L}(W',V')$. 对于 $\varphi\in W'$, $T'(\varphi)=\varphi\circ T$

代数性质: $\begin{cases}(S+T)'=S'+T'\\ (\lambda T)'=\lambda T'\\ (ST)'=T'S'\end{cases}$

线性映射的对偶的零空间和值域 （用 range$T$ 和 null$T$ 描述 null$T'$, range$T'$）

① 零化子 $U\subset V$. $U^0=\{\varphi\in V': 对所有 u\in U 都有 \varphi(u)=0\}$

① 零化子是子空间. $U^0$ 是 $V'$ 子空间 $(U\subset V)$

* $\dim U^0=\dim V'-\dim U'=\dim V-\dim U$

$T'$ 的零空间 $V, W$ 有限维. $T\in\mathcal{L}(V,W)$

$\begin{cases}\operatorname{null}T'=(\operatorname{range}T)^0\\ \dim\operatorname{null}T'=\dim\operatorname{null}T+\dim W-\dim V\end{cases}$

$T'$ 是满的当且仅当 $T$ 是单的

$T'$ 的值域 $\begin{cases}\dim\operatorname{range}T'=\dim\operatorname{range}T\\ \operatorname{range}T'=(\operatorname{null}T)^0\end{cases}$

$T'$ 是单的当且仅当 $T$ 是满的

对偶映射的矩阵

矩阵转置

$T'$ 的矩阵是 $T$ 的矩阵的转置. （选相应对偶基）

矩阵的秩 $\begin{cases}行秩: A 的诸行在 \mathbf{F}^{1,n} 中张成空间的维数\\ 列秩: A 的诸列在 \mathbf{F}^{m,1} 中张 - - - -\end{cases}$

* $\dim\operatorname{range}T=\mathcal{M}(T)$ 的列秩

行秩 = 列秩

$A$ 的列秩 $=\mathcal{M}(T)$ 的列秩
$=\dim\operatorname{range}T$
$=\dim\operatorname{range}T'$
$=\mathcal{M}(T')$ 的列秩
$=A^T$ 的列秩 $=A$ 的行秩.

---

$U\subset V$. 求 $U^0$. $U^0\subset V'$

$\exists W$ s.t. $V=U\oplus W$

$U$ 的一组基 $u_1,\cdots,u_n$ 对偶基 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n$

$W$ 的一组基 $w_1,\cdots,w_m$ 对偶基 $\psi_1,\cdots,\psi_m$

$V$ 的一组基 $u_1,\cdots,u_n,w_1,\cdots,w_m$

$V'$ 的一组基 $\varphi_1,\cdots,\varphi_n,\psi_1,\cdots,\psi_m$

$\forall\varphi\in V'$: $\varphi=c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n+d_1\psi_1+\cdots+d_m\psi_m$

若 $\varphi\in U^0$: $(c_1\varphi_1+\cdots+c_n\varphi_n+d_1\psi_1+\cdots+d_m\psi_m)(u_i)=0$

$\Rightarrow c_1=\cdots=c_n=0$

$\therefore U^0=\operatorname{span}(\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_m)$

* note that $V=U\oplus W$

$\downarrow$

$V'=U'\oplus W'$

$\varphi_1\cdots\varphi_n$ $\psi_1\cdots\psi_m$

$\Rightarrow V'=U'\oplus U^0$

---

$T'\in\mathcal{L}(W',V')$ $T\in\mathcal{L}(V,W)$

$A=\mathcal{M}(T')$, $C=\mathcal{M}(T)$

$\Leftrightarrow A_{j,k}=C_{k,j}$

$T'(\psi_j)=A_{1,j}\varphi_1+\cdots+A_{n,j}\varphi_n$

$\psi_j\circ T(v_k)=(A_{1,j}\varphi_1+\cdots+A_{n,j}\varphi_n)(v_k)$

$\psi_j\circ(C_{1,k}w_1+\cdots+C_{m,k}w_m)=A_{k,j}$

即 $C_{j,k}=A_{k,j}$ 得证

---

$\mathcal{M}(T)$ 的列秩 $=\dim\operatorname{span}(\mathcal{M}(T)_{\cdot,1},\cdots,\mathcal{M}(T)_{\cdot,n})$
$=\dim\operatorname{span}(\mathcal{M}(Tv_1),\cdots,\mathcal{M}(Tv_n))$ 同构
$=\dim\operatorname{span}(Tv_1,\cdots,Tv_n)$
$=\dim\operatorname{range}T$

内积空间

内积
- 正性
- 定性
- 第一个位置加性齐性
- 共轭对称性 $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

性质
- 对每个取定的 $u\in V$，将 $v$ 变为 $\langle v,u\rangle$ 的函数是 $V$ 到 $F$ 的线性映射
- $\langle 0,u\rangle=\langle u,0\rangle=0$
- 第二个位置加性
- $\langle u,\lambda v\rangle=\bar{\lambda}\langle u,v\rangle$

范数
- $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$
- 性质
  - $\|v\|=0$ 当且仅当 $v=0$
  - 所有 $\lambda\in F$: $\|\lambda v\|=|\lambda|\,\|v\|$
- 正交. $\langle u,v\rangle=0$
  - $0$ 正交于 $V$ 中任意向量
  - $0$ 是 $V$ 中唯一与自身正交的向量

勾股: $\|u+v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$ ($u$ 与 $v$ 正交)

正交分解: $c=\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$, $w=u-\frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}v$ 则 $\langle w,v\rangle=0$ 且 $u=cv+w$

$|\langle u,v\rangle|\le\|u\|\cdot\|v\|$ 等号成立当且仅当一个是另一个标量倍.

$\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$

$\|u+v\|^2+\|u-v\|^2=2(\|u\|^2+\|v\|^2)$

规范正交基

① $\langle e_j,e_k\rangle=\begin{cases}1 & j=k\\ 0 & j\neq k\end{cases}$

② $\|a_1e_1+\cdots+a_me_m\|^2=|a_1|^2+\cdots+|a_m|^2$

③ $V$ 中每个长度为 $\dim V$ 的规范正交向量组都是 $V$ 的规范正交基

格拉姆-施密特过程.

$e_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}$, $e_j=\frac{v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}}{\|v_j-\langle v_j,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v_j,e_{j-1}\rangle e_{j-1}\|}$

$\operatorname{span}(v_1,\ldots,v_j)=\operatorname{span}(e_1,\ldots,e_j)$

① 每个有限维内积都有规范正交基

② $V$ 有限维, $V$ 中每个规范正交向量组都可以扩充成 $V$ 的规范正交基

③ 若 $T$ 关于 $V$ 某个基有上三角矩阵, 则 $T$ 关于 $V$ 的某个规范正交基也有上三角矩阵.

④ 有限维复向量空间 $T\in L(V)$ 关于某个规范正交基有上三角矩阵 (舒尔定理)

⑤ 里斯表示定理

$V$ 有限维且 $\varphi$ 是 $V$ 上线性泛函, 则 $\exists$ 唯一向量 $u\in V$ 使得每个 $v\in V$ 均有 $\varphi(v)=\langle v,u\rangle$

$u=\overline{\varphi(e_1)}e_1+\cdots+\overline{\varphi(e_n)}e_n$

正交补

① $U^{\perp}=\{v\in V:$ 每个 $u\in U$ 均有 $\langle v,u\rangle=0\}$

性质
- 若 $U$ 是 $V$ 的子集，则 $U^{\perp}$ 是 $V$ 的子空间
- $\{0\}^{\perp}=V$
- $V^{\perp}=\{0\}$
- 若 $U$ 是 $V$ 的子集，则 $U\cap U^{\perp}\subset\{0\}$
- 若 $U$、$W$ 是 $V$ 子集，$U\subset W$ 则 $W^{\perp}\subset U^{\perp}$

② 设 $U$ 是 $V$ 的有限维子空间，则 $V=U\oplus U^{\perp}$ $v=\langle v,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle v,e_m\rangle e_m+v-\langle v,e_1\rangle e_1-\cdots-\langle v,e_m\rangle e_m$

③ $\dim U^{\perp}=\dim V-\dim U$

④ $(U^{\perp})^{\perp}=U$

★ 正交投影 $P_U v=u$.

性质 $U$ 是 $V$ 的有限维子空间且 $v\in V$.
- $P_U\in\mathcal{L}(V)$.
- 每个 $u\in U$. $P_U u=u$
- 每个 $w\in U^{\perp}$, $P_U w=0$
- $\operatorname{range}P_U=U$
- $\operatorname{null}P_U=U^{\perp}$.
- $v-P_U v\in U^{\perp}$
- $P_U^2=P_U$
- $\|P_U v\|\le\|v\|$
- 对 $U$ 的每个规范正交基: $P_U v=\langle v,e_1\rangle e_1+\cdots+\langle v,e_m\rangle e_m$

## 极小化问题

$U$ 是 $V$ 有限维子空间, $v\in V$, $u\in U$. $\|v-P_U v\|\le\|v-u\|$

等号成立当且仅当 $u=P_U v$